

$$E=mc^2$$

Über den Autor:

Heribert Genreith, Jahrgang 1957, studierte an der Universität zu Köln zunächst Geschichte und schließlich Geophysik. Er machte in 1988 seinen Abschluss in theoretischer Plasmaphysik mit einer Arbeit zu Magnetosphärenwechselwirkungen des Jupiter-Io-Systems.

So entstand aus der Beschäftigung mit astronomischen und kosmologischen Themen das Bedürfnis, ein kleines und praktisches Lehrbuch zum Erlernen der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie zu erstellen: so schmerzlos wie möglich, aber doch so tiefgehend wie nötig!

Heribert Genreith

$E=mc^2$ Quadrat

Was du schon immer über
Relativitätstheorie
wissen wolltest.

**Bibliografische Information der Deutschen
Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet
über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Copyright 2007 Heribert Genreith
Herstellung und Verlag: Books on Demand GmbH, Norderstedt
ISBN 978-3-8370-0563-9

Inhaltsverzeichnis

I	Die spezielle Relativitätstheorie (SRT)	10
1	Die Theorie von 1905	11
1.1	Die Galileitrafo	11
1.2	Die Lorentztrafo	12
1.3	Das SRT-Additionstheorem für Geschwindigkeiten	14
1.4	Die relativistische Masse in der SRT	15
1.5	Die relativistische Energie und Impuls in der SRT	17
1.6	Kurze Diskussion der SRT bis hierhin	18
1.7	Gleichzeitigkeit	21
1.7.1	Kurze Diskussion der Gleichzeitigkeit	22
1.8	Die Geometrisierung der SRT	25
II	Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART)	33
2	Die Theorie von 1915	34
2.1	Die Geodätengleichung	35
2.2	Newtonsche Näherung	38
3	Intermezzo: Gute Physik, schlechte Physik	43
3.1	Newton betritt die Szene	45
3.2	Maxwell tritt auf	48
3.3	Albert kommt!	51
3.4	Albert legt noch einen drauf...	52

4 Die Feldgleichungen	55
4.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen	56
4.2 Vor der harten Mathe: Resümee bis hierher...	60
5 Mathematik, Teil I	63
5.1 Tensoren	64
5.2 Tensoralgebra	67
5.2.1 Wir berechnen eine Raumkrümmung	68
5.3 Der Metriktensor	71
5.4 Mannigfaltigkeiten	77
6 Die Schwarzschildmetrik	80
6.1 Newtonsche Betrachtungsweise	80
6.2 Relativistische Betrachtungsweise	84
6.2.1 Die Krümmung der SSM	86
6.3 Gibt es schwarze Löcher?	87
6.3.1 Die SSM im Aussenraum	87
6.3.2 Die SSM im Innenraum	89
6.3.3 Alice	90
6.3.4 Back to the roots...	93
6.3.5 Stellare und sonstige Schwarze Löcher	94
6.4 Zusammenfassung	97
7 Mathematik, Teil II	99
7.1 Die kovariante Ableitung	99
7.2 Besondere Eigenschaften von $(;)$	102
7.3 Der Krümmungstensor	104
8 Der Energie/Impulstensor	107

Vorwort

Dieses Tutorial zur Theorie der Relativität will weder vollständig noch allzu genau oder gar weltbewegend sein. Es soll, wie der Amerikaner sagt "quick and dirty" sein. Die übliche Diskussion physikalischer und naturphilosophischer Feinheiten werden zugunsten einer schnellen Aneignung der Theorie zurückgestellt. Es wird lediglich Wert darauf gelegt, dass die wichtigsten Erkenntnisse der Theorie nachvollziehbar hergeleitet werden, so dass der interessierte Leser Kopf und Fuß an die Angelegenheit kriegt, ohne von zuviel höherer Mathematik und relativistischen Feinheiten erschlagen zu werden. Ich denke nichts geht über die eigene Anschauung: Wie komme ich auf $E = mc^2$ oder den Schwarzschildradius $r = 2GM/c^2$? So wie du am ehesten glaubst, was du mit eigenen Augen gesehen hast, so sehr wirst du Theorien eher akzeptieren, die du im wesentlichen selbst nachgerechnet hast. Dieses Tutorial ist daher geradeaus aufgebaut, so wie man sich durch die Theorie stückweise durchbeißt, angefangen bei der technisch einfachen (wenn auch nicht gleich intuitiv selbstverständlichen) speziellen Relativitätstheorie bis hin zur mathematisch anspruchsvollen allgemeinen Theorie. Um den Lesefluss derjenigen nicht zu stören die bereits über eine gewisse mathematisch-physikalische Vorbildung verfügen, werde ich etliche Erläuterungen in *Fussnoten* unterbringen. Ich bitte daher diese ggf. auch zu lesen.

Am Anfang der (speziellen) Relativitätstheorie stand eine simple und sehr erstaunliche *experimentelle* Feststellung: In gegeneinander bewegten Bezugssystemen ist die gemessene Lichtgeschwindigkeit *immer von konstantem Betrag* $c \cong 3 \cdot 10^8$ m/sec! Das ist aber eine mächtige Zwickmühle: Als Beispiele nehme dir einen fahrenden Zug, in dem du einen Tennisball mit 100 km/h in Fahrtrichtung gegen eine Wand schlägst. Der Zug rast währenddessen mit 150

km/h durch einen Bahnhof. Schiesst du den Ball jetzt statt gegen die Zugwand in Fahrtrichtung dem Bahnhofsvorsteher gegen den Kopf, dann kriegt der die Wucht eines Tennisballs von 250 km/h zu spüren. Entsprechendes würde man auch für einen Lichtstrahl erwarten: Bewegt sich eine Lichtquelle auf einen Beobachter mit der Geschwindigkeit v zu, so müsste die gemessenen Geschwindigkeit des von daher ausgehenden Lichtstrahls $V_g = c + v$ sein, also höher sein, und umgekehrt, wenn sich die Lichtquelle vom Beobachter wegbewegt, eben niedriger.

Aber das ist definitiv nicht der Fall! Da man mit Hilfe von Interferenzmustern auch sehr geringe Abweichungen der Lichtgeschwindigkeit zweier Lichtstrahlen zueinander problemlos nachweisen kann, hätte man den Effekt unbedingt im Experiment sehen müssen. Da war aber beim besten Willen nichts zu finden. Wie kann das sein? Man hat zuerst versucht, diese verrückte Tatsache irgendwie mit Hilfe komplizierter Äthertheorien¹ wegzudiskutieren und man hat verschiedene Messungen vorgenommen um dem vermeintlichen Fehler auf die Spur zu kommen. Die berühmteste Präzisionsmessung dazu ist der Michelson-Morley Versuch, wobei auf einem Interferometer von ein paar Metern Größe der Effekt unterschiedlicher Lichtgeschwindigkeiten gesucht wurde, aber man hat auch an Sternenlicht gemessen, um eventuell unbekannte irdische Phänomene auszuschliessen. Alle Versuche endeten immer mit dem gleichen Ergebnis: Es existieren keine messbaren Variationen in der Lichtgeschwindigkeit und schon garnicht in der normalerweise zu erwartenden Größenordnung. Würde sich also ein Raumschiff mit c auf dich zubewegen und dabei einen Lichtpuls in deine Richtung aussenden, so wirst du nicht $V_g = c + c = 2c$ messen, sondern tatsächlich misst du immer nur $V_g = c$!

Der Ausweg ist die sogenannte Lorentztransformation für gleichförmig gegeneinander bewegte Bezugssysteme, nach der Raum und Zeit eine angemessene Beschreibung erhalten. Die Transformation ist nach Lorentz, und nicht nach Einstein, benannt, da dieser sie schon früher gefunden hatte. Lorentz und andere nahmen jedoch an, das es sich dabei nur um einen speziellen elektrodynamischen Effekt handele, der zwar für Lichtstrahlen von Belang, nicht aber

¹Es gibt auch heute durchaus respektable Wissenschaftler, die weiterhin an Äthertheorien festhalten, d.h. an der Festlegung eines ausgezeichneten Bezugssystems. Ich will hier nicht weiter darauf eingehen, aber man könnte pauschal dazu sagen, daß erstens die Theorie dadurch nicht einfacher wird und zweitens durch die Einführung mutmasslich völlig unnötiger Komplikationen erschwert und uneleganter wird. Für dieses Tutorial spielt diese Anschauung jedenfalls keine Rolle.

auf allgemeine mechanische Systeme anzuwenden wäre.

Wenn schon die spezielle Relativitätstheorie (SRT) einiges zu denken aufgibt, so ist deren logische Weiterentwicklung zu einer Theorie der beschleunigten Bezugssysteme, der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), erst recht ein faszinierendes Abenteuer. In der vorliegenden Einführung in die Relativitätstheorie werde ich mich auf die möglichst kurze und griffige Darstellung und Herleitung der bekanntesten Zusammenhänge beschränken. Der Leser erhält hiermit einen mathematisch-physikalischen Ausgangspunkt für weitere Studien.