

Zur Frage der Bewertung der Wirtschaftlichkeit von Angeboten bei definierter prozentualer Berücksichtigung von Leistungs- und Kostenanteilen.

Heribert Genreith*

August 2003

Zusammenfassung

Im Rahmen des öffentlichen Beschaffungswesens auf Grundlage der Verdingungsordnung für Leistungen [1] sind regelmässig die Angebote einer Vielzahl von Bietern, insbesondere im Bereich der Informationstechnik, sowohl leistungs- als auch kostenmässig zu bewerten. Neben dieser gesetzlichen Regelung setzten die Empfehlungen der KBSt¹ ([2],[3],[4]) Massstäbe auch für die in Kennzahlen ausgedrückte Auswertung der Angebote.

Neben dem häufig als Bewertungsformel verwendeten Preis- zu Leistungsverhältnis werden auch Bewertungsformeln gewünscht, die eine definierte prozentuale Berücksichtigung von Leistung und Kosten an der Bewertungszahl für ein Angebot erlauben. Die seit 1988 in der öffentlichen Verwaltung zu diesem Zweck verwendeten Formeln ([2],[5]) sind jedoch dazu mathematisch unzulänglich. In diesem Artikel wird daher die Klasse der Bewertungsfunktionen hergeleitet, die diese Forderung erfüllen können.

*Beschaffungsamt des BMI, St. Augustiner Str. 86, 53225 Bonn

¹KBSt steht für : Koordinierungs- und Beratungsstelle der Bundesregierung für Informationstechnik in der Bundesverwaltung im Bundesministerium des Innern.

1 Einleitung

Die Bewertung von Angeboten in einem Beschaffungsverfahren erfolgt regelmässig so, dass durch die Anwendung geeigneter Bewertungstabellen jedem Bieter i ein Zahlenwert für seine Leistung L_i zugeordnet ([2],[3],[4]) wird. Diese Leistung muss dann in einer Gesamtschau den zugehörigen Kosten K_i ([1], § 25 Nr. 3) des Angebotes gegenübergestellt werden. Zu diesem Zweck wird häufig das bekannte PreisLeistungsverhältnis oder besser das Leistungspreisverhältnis verwendet: Die bezifferte Leistung L_i wird durch den Angebotspreis P_i geteilt und das Angebot mit dem besten L_i/P_i -Verhältnis erscheint zunächst als die günstigste Kaufoption. Jedoch hat dieses Verfahren einige Unzulänglichkeiten, z.B. können verschiedene Angebote durchaus vergleichbare L/P -Verhältnisse haben obwohl die angebotene Leistung stark unterschiedlich ist, denn sehr preisgünstige Angebote vermögen ihr Leistungsdefizit durch einen geringeren Preis leicht auszugleichen.

Im Rahmen der Bewertung von Angeboten wird daher gelegentlich ein Formalismus gewünscht, der den Anteil der Leistung und der Kosten an der Bewertungszahl für Angebote in Prozent angibt. Zu diesem Problem wurden in der Vergangenheit Vorschläge [2],[5] gemacht, die zum Teil jedoch auf unzureichenden mathematischen Annahmen beruhen. In diesem Artikel wird daher eine mathematisch rigorose *Herleitung der Klasse aller Abbildungen herbeigeführt, die die Forderung nach der definierten prozentualen Berücksichtigung von Leistung und Kosten auf die Bewertungszahl berücksichtigen.*

Dieser Artikel bezieht sich alleine auf die korrekte Herleitung solcher Funktionsklassen, eine juristische Bewertung verschiedener Bewertungsfunktionen kann und soll hier nicht geleistet werden. Es ist jedoch zu bemerken, dass bezüglich der prozentualen Bewertung bereits Gerichtsverfahren² ausgefochten wurden, in denen die Frage der prozentualen Gegenüberstellung von Leistung und Preis Gegenstand von Klagen war. Dies ist vor dem Hintergrund zu sehen, dass eine mathematische Analyse des zugrundeliegenden Problems im öffentlichen Bereich nach unserer Kenntnis nie rigoros durchgeführt wurde und deswegen dringend geboten ist.

²Z.B: OLG Düsseldorf Verg22/01, OLG Dresden WVerg0011/00; WVerg0012/00, wobei regelmässig eine Mindestberücksichtigung des Preises in Höhe von wenigstens 30 % verlangt wurde.

2 Allgemeine Formulierung des Problems

Zur Bewertung von Angeboten werden regelmässig Bewertungszahlen³

$$L, K \mapsto Z(L, K)$$

eingeführt, die die Wirtschaftlichkeit eines gegebenen Angebotes durch die Verrechnung von, mittels Bewertungstabellen ermittelten, Leistungspunkten L und der aus den Preisen zu ermittelnden Kostenbewertung des Angebotes K wiedergeben sollen.

Zur Ermittlung von dem Problem angepassten Funktionsklassen ist daher zunächst die gestellte Aufgabe korrekt zu definieren und aus diesen Bedingungen ist die Klasse der geeigneten Abbildungen $L, K \mapsto Z$ herzuleiten. Das totale Differential einer Bewertungszahl Z , die von zwei unabhängigen Variablen L, K abhängt ist:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial L} dL + \frac{\partial Z}{\partial K} dK \quad (1)$$

Soll nun die Gesamtänderung der Bewertungszahl Z nach einem festen Verhältnis von der Leistungs- und Kostenbewertung abhängig sein, so ist zu fordern:

$$dZ = p dL + (1 - p) dK \quad (2)$$

Dabei ist p der prozentuale⁴ Anteil der Leistungsbewertung und $1 - p$ der verbleibende Anteil für die Kostenbewertung an der Gesamtänderung der Bewertungszahl Z . Es ist also zu fordern,

$$\left| \frac{\partial Z}{\partial L} \right| = p \quad \text{und} \quad \left| \frac{\partial Z}{\partial K} \right| = 1 - p \quad (3)$$

$$\text{bzw.} \quad \left| \frac{\frac{\partial Z}{\partial L}}{\frac{\partial Z}{\partial K}} \right| = \frac{p}{1 - p} \quad (4)$$

dass die partiellen Ableitungen der gesuchten Funktionen dem Betrage nach den gewünschten konstanten prozentualen Anteilen entsprechen. Die Ableitungen 2. Ordnung sind daher Null, und man kann somit zunächst

³Die Funktion Z ist eine stetige Funktion ihrer Variablen L und K . Jedem von i Angeboten wird damit eine Bewertungszahl Z_i zugeordnet; die aus Z gewonnene Folge der Angebotsbewertungen Z_i ist eine nichtstetige anordenbare Menge von Zahlen $Z_i(L_i, K_i)$.

⁴Es wird hier die natürliche Notation von Prozentzahlen verwendet (percent= lat. für Hundertstel, z.B. $p = 70\% = \frac{70}{100} = 0,7$).

fordern, dass

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial L^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} = 0 \quad (5)$$

für die Klasse der geeigneten Abbildungen gelten sollte.

3 Aufstellung einer partiellen Differentialgleichung für die Klasse der geeigneten Abbildungen

Wegen (5) muss die allgemeinere partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$c^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial L^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} = 0 \quad (6)$$

für die in Frage kommenden allgemeinen Funktionen⁵ gelten, wobei Lösungen gesucht sind, die die Nebenbedingungen (3, 4) erfüllen. Wie man sieht, handelt es sich bei (6) um eine partielle Differentialgleichung vom Wellentyp, mit der bekannten [6] allgemeinen Lösungsgesamtheit⁶:

$$Z = f(L - cK) + g(L + cK) \quad (7)$$

f und g sind dabei beliebige stetige Funktionen ihres Arguments, der Parameter c ist eine beliebige Konstante. Es ist also festzustellen, dass nur Abbildungen vom allgemeinen Typ (7) als Lösungskandidaten zum gestellten Problem in Frage kommen. Aus der Klasse dieser Funktionen ist nun eine geeignete problemangepasste Funktion auszuwählen.

4 Auswahl geeigneter Abbildungen

Für die Auswahl geeigneter Funktionen ist zu fordern, dass bei der Bildung der Bewertungszahl Z eine höhere Leistungsbewertung zu einer höheren Bewertungszahl, eine höhere Kostenbewertung eine geringere Bewertungs-

⁵Wegen $\frac{\partial^2 Z}{\partial L^2} = 0$ gilt natürlich auch $a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial L^2} = 0$ und auch $b^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} = 0$, und mit $c^2 := a^2/b^2$ folgt obige pDGL. a, b, c sind zunächst beliebige Konstanten, die Grösse c definiert die sogenannte Wellengeschwindigkeit.

⁶Der Beweis ist durch einsetzen der Lösung (7) in die Ausgangsgleichung (6) zu führen: $c^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial L^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} = c^2 Z'' - c^2 Z'' = 0$. Dabei bedeutet der Strich die Ableitung nach dem Argument. Siehe auch z.B. Courant und Hilbert, S.5.

zahl ergeben sollen. Die Funktionen f hat als Argument $L - cK$ und erfüllt daher vom Argument her unsere Forderung. Damit sollte für

$$Z = f(L - cK)$$

eine beliebige monoton steigende Funktion⁷ f ihres Argumentes $L - cK$ gefunden werden. Eine geeignete Funktion ist z.B. die Funktion $Z^* = \mathbf{1}(L - \frac{1-p}{p}K) + Z_0^*$ mit $c = \frac{1-p}{p}$ und mit $Z := pZ^*$ folgt damit auch

$$Z = pL - (1-p)K + Z_0 \quad (8)$$

wie man durch einsetzen leicht verifizieren kann und die den Forderungen (3) bis (7) genügt. Z_0 ist dabei die durch geeignete Nebenbedingungen frei wählbare Integrationskonstante.

Andere geeignete Abbildungen sind z.B. durch die streng monoton steigende Exponentialfunktion gegeben:

$$Z = Z_0 e^{(pL - (1-p)K)} \quad (9)$$

Diese Funktion erfüllt ebenfalls die Bedingungen⁸ (4), (6) und (7). Weiterhin kann man evtl. auch noch die Forderung der Monotonie aufgeben, z.B. könnte man fordern, dass ab einer gewissen, durch ϕ gegebenen Grenze die Bewertungsfunktion nach unten abknickt; diese Eigenschaft haben etwa Funktionen wie

$$Z = Z_0 \sin^2(2\pi\phi(pL - (1-p)K)) \quad (10)$$

die ebenfalls grundsätzlich zur Klasse der geeigneten Funktionen gehören. Die Freiheit in der Wahl der Funktionen f und g aus (7) lassen viel Spielraum für die Konstruktion problemangepasster Funktionen. Entscheidend für die Erfüllung der Forderung nach einer definierten prozentualen Bewertung ist jedoch immer die Wahl der Argumente der Form $L - cK$ und/oder $L + cK$.

⁷Es sind nicht unbedingt *streng* monoton steigende Funktionen zu fordern. Die konstante monotone Einsfunktion $\mathbf{1}$ ist daher eine geeignete Funktion. Die beliebige Funktion g wird hier mit der Nullfunktion abgebildet.

⁸Die Bedingung (5) ist etwas zu streng, sie erlaubt nur in beiden Variablen einfach lineare Abbildungen. Dies ist jedoch nicht unbedingt erforderlich, die weniger strenge Bedingung (6) ist ausreichend für den gestellten Zweck.

5 Zur Bildung von Leistungs- und Kostenbewertung

Die Bildung der Zahlen Leistungsbewertung L und Kostenbewertung⁹ K bedürfen einer Einheit; diese sind die mit ihnen verbundenen Massstäbe. Bei der Leistungsbewertung ist der angelegte Massstab die Bewertungstabelle, abgekürzt [BT]. Für die Kosten wird als Massstab i.d.R. ein Preis in Einheiten irgendeiner Währung, meist Euro, gewählt, hier also [Whr] für Währung. Die Verrechnung unterschiedlicher Einheiten stellt im Falle von Multiplikation oder Division kein Problem¹⁰ dar; bei der Bildung von Summen oder Differenzen ist die Wahl gleicher Einheiten aber unbedingt notwendig. Daher müssen die Zahlen L und K hier durch die Wahl geeigneter Faktoren auf gleiche Einheiten skaliert werden. Dies lässt sich z.B. durch die Normierung auf Sollwerte und die Einführung neuer Variablen

$$\begin{aligned} L &\mapsto \frac{L}{L_{Soll}} \\ K &\mapsto \frac{P}{P_{Soll}} \end{aligned} \quad (11)$$

erreichen, wobei die neue Leistungszahl L durch die Normierung auf einen Sollwert für eine gute Leistung L_{Soll} die Einheit $[BT]/[BT]=[1]$ erhält und die Kostenbewertung K mit den Preisen P identifiziert wird und durch die Normierung auf den Schätzwert für ein preiswürdiges Angebot P_{Soll} auf die gleiche Einheit $[Whr]/[Whr]=[1]$ gebracht wird. Die folgende Formel erfüllt die Forderungen (3) bis (7) nun in den neuen Variablen¹¹ (11) und

⁹Es muss an dieser Stelle auf den gravierenden Unterschied zwischen Kostenbewertung K und Preisen P hingewiesen werden: Der Preis ist eine Geldmenge, die in Dollar, Euro oder Britischen Pfund angegeben werden kann. Die Kostenbewertung ist nicht mit einem solchen Preis gleichzusetzen, die häufig gewählte Identität $K \equiv P$ ist i.a. kein geeigneter Bewertungsmaßstab. Statt der hier vorgeschlagenen Normierung auf Sollwerte könnte auch eine geeignete Kostenbewertungstabelle Preis (von...bis...) = x Punkte herangezogen werden.

¹⁰Die Geschwindigkeit eines PKW wird z.B. durch das Verhältnis von zurückgelegter Strecke zur verbrauchten Zeit bestimmt, die Einheit ist daher km/h; für das Leistungs zu Preisverhältnis gilt entsprechendes und es hat die Einheit BT/Whr. Die Summen oder Differenzen $\text{km} \pm \text{h}$ oder $\text{BT} \pm \text{Whr}$ sind jedoch nicht sinnvoll für unterschiedliche Einheiten zu definieren.

¹¹Aufgrund der grundsätzlichen Inkompatibilität von Leistungsbewertungen und Preisen muss immer auf solche neuen Variablen transformiert werden. In den alten Variablen ist das Verhältnis (4) $\frac{p}{1-p} \frac{P_{Soll}}{L_{Soll}} = \text{const.}$ dann aber immer noch eine Konstante.

die so definierte Bewertungszahl (8) schreibt sich damit zu

$$Z = p \frac{L}{L_{Soll}} - (1 - p) \frac{P}{P_{Soll}} + Z_0 \quad (12)$$

Die Integrationskonstante Z_0 ist beliebig durch weitere Nebenbedingungen wählbar. Sie kann der Einfachheit halber gleich Null gesetzt werden, jedoch kann dann die Bewertungszahl Z ggf. auch kleiner Null sein. Dies stellt zwar kein mathematisches Problem dar, jedoch ist die Behandlung negativer Zahlen für mathematisch wenig kundige Beschaffer problematisch. Mit der Wahl eines geeigneten Z_0 kann jedoch erreicht werden, dass die Vergleichswerte immer grösser Null sind.

5.1 Mögliche Vorgehensmethoden

Es werden im folgenden zwei Beispiele für monotone Funktionen angeführt. Monotoniewechselnde Funktionen wie (10) sollten i.a. wegen der zusätzlich notwendigen Parameter (hier z.B. ϕ) nicht weiter untersucht werden.

5.1.1 Abbildung vom Typ (12)

Da die Wahl eines beliebigen Z_0 keinen Einfluss auf die Monotonie der Funktion und damit der Reihenfolge der Bewertungszahlen Z_i der Angebote hat, lässt sich mit der Wahl des negativen der niedrigsten Bewertungszahl

$$Z_0 := -Z_{min}^{(0)} \quad (13)$$

erreichen, dass alle i Bewertungszahlen $Z_i \geq 0$ sind. Dazu müssen natürlich zuallererst die Werte der i Angebote Z_i gemäss der Formel (12) mit $Z_0 = 0$ gebildet werden. Es ist weiterhin klar, dass die Multiplikation der Bewertungszahl Z mit einer beliebigen positiven Konstanten α ebenfalls die Monotonie nicht ändert, und mit der Wahl von

$$\alpha := \frac{100}{Z_{max}^{(1)}} \quad (14)$$

lässt sich im nächsten Schritt erreichen, dass alle Bewertungszahlen

$$Z = \frac{100}{Z_{max}^{(1)}} \left(p \frac{L}{L_{Soll}} - (1 - p) \frac{P}{P_{Soll}} - Z_{min}^{(0)} \right) \quad (15)$$

auf den komfortablen Bereich $[0, 100]$ abgebildet werden.

Damit wäre eine mögliche kaufmännische Methode zur Bildung einer Bewertungsreihe, die der Anforderung nach prozentualer Berücksichtigung von Preis und Leistung erfüllt, durch folgenden Algorithmus gegeben:

1. Bestimme (i.a. im Vorhinein) die Zielwerte L_{Soll} und P_{Soll} für ein gutes und preiswertes Angebot, sowie den Prozentsatz p , mit der die Leistungsbewertung in die Gesamtschau eingehen soll,
2. Bestimme die Rangfolge der erhaltenen Angebote gemäss $Z = p \frac{L}{L_{Soll}} - (1-p) \frac{P}{P_{Soll}}$; diese Bewertungszahlen können auch negativ sein, falls dieser Umstand Probleme bereitet, mache z.B. folgendes:
 - (a) Suche die niedrigste Bewertungszahl Z_{min} ,
 - (b) Setze nun $Z_0 := -Z_{min}$,
 - (c) Bestimme die grösste Bewertungszahl Z_{max} aus $Z = p \frac{L}{L_{Soll}} - (1-p) \frac{P}{P_{Soll}} - Z_{min}$,
 - (d) Normiere nun alle Bewertungszahlen gemäss $Z = \frac{100}{Z_{max}} \left(p \frac{L}{L_{Soll}} - (1-p) \frac{P}{P_{Soll}} - Z_{min} \right)$; diese belegen nun den positiven Wertebereich von 0 bis 100, wobei das schlechteste Angebot mit 0 und das beste Angebot mit 100 bewertet ist.

5.1.2 Abbildung vom Typ (9)

Die obige Vorgehensweise erscheint ein wenig zu aufwendig, da entweder ggf. mit negativen Zahlen zu rechnen ist oder umständlich auf positive Zahlen zu normieren ist. Einfacher ist es dagegen gleich eine Funktion zu wählen, die auf einen positiven Wertebereich abbildet. Die Funktion (9) ist dazu ideal geeignet, da sie immer Werte $Z > 0$ liefert und die Reihenfolge der Angebote aufgrund ihrer streng steigenden Monotonie nicht ändert. Um einen komfortablen Wertebereich zu bekommen, wird hier $Z_0 = 100$ gewählt:

$$Z = 100 \cdot \exp \left(p \frac{L}{L_{Soll}} - (1-p) \frac{P}{P_{Soll}} \right) \quad (16)$$

Damit wäre eine weitere mögliche kaufmännische Methode zur Bildung einer Bewertungsreihe, die der Anforderung nach prozentualer Berücksichtigung von Preis und Leistung erfüllt, durch folgenden, einfacheren Algorithmus gegeben:

1. Bestimme (i.a. im Vorhinein) die Zielwerte L_{Soll} und P_{Soll} für ein gutes und preiswertes Angebot, sowie den Prozentsatz p , mit der die Leistungsbewertung in die Gesamtschau eingehen soll,

2. Bestimme die Rangfolge der erhaltenen Angebote gemäss

$Z = 100 \cdot \exp(p \frac{L}{L_{Soll}} - (1-p) \frac{P}{P_{Soll}})$; diese Bewertungszahlen belegen nun einen positiven Wertebereich der für das beste Angebot Werte in der typischen Grössenordnung von ≈ 50 bis 500 liefert.

6 Fazit

Das Problem der definierten prozentualen Verteilung von Leistungs- und Kostenbewertung an der Bewertungszahl für Angebote wurde mathematisch definiert. Es konnte gezeigt werden das stetige Funktionen für die Bewertungszahl Z , die diese Forderung erfüllen, der Funktionenklasse

$$Z(L, K) = f(L - cK) + g(L + cK)$$

angehören müssen. Das Problem der Verrechnung von Leistungs- und Kostenbewertung wurde klarifiziert und die Notwendigkeit einer Koordinatentransformation aufgezeigt. Es wurden Beispiele für Bewertungsfunktionen angegeben; zwei praktisch mögliche Funktion (12),(9) dieser Klasse sowie zwei mögliche Vorgehensmethoden konnten ausgeführt werden.

6.1 Nachsatz

Das häufig verwendete Leistungs- zu Kostenverhältnis hat die Form:

$$Z(L, K) = \frac{L}{K} = LK^{-1}$$

Es wurden in der Vergangenheit aber auch andere Abbildungen definiert und auch tatsächlich verwendet, z.B. in [2],[5], um einen definierten prozentualen Anteil von Leistungs- und Kostenbewertung an der Bewertungszahl $Z(L, K)$ zu erreichen. Die von den Autoren darin vorgeschlagenen Formeln lauten in unserer Notation:

$$Z = pL + (1-p) \frac{L_{max} P_{min}}{P} \quad \text{und} \quad Z = pL + (1-p) \min_{m=1, \dots, i} \left(\frac{P_m}{L_m} \right) \frac{L_{max} L}{P}.$$

Dabei sind L_{max}, P_{min} sowie $\min_{m=1, \dots, i} \left(\frac{P_m}{L_m} \right)$ aus der Angebotsmenge zu bestimmende Konstanten, die Kosten K werden mit den Preisen $K \equiv P$ identifiziert. Entscheidend ist im folgenden Zusammenhang nur, dass der jeweils letzte Term der Formeln daher die variablen Grössen K^{-1} bzw.

LK^{-1} enthalten und daher von der Form

$$Z(L, K) = L + cK^{-1}$$

und auch

$$Z(L, K) = L + cLK^{-1}$$

sind. Die Forderungen (3,4) liefern daher die nichtkonstanten Werte

$$\left| \frac{\frac{\partial Z}{\partial L}}{\frac{\partial Z}{\partial K}} \right| = \frac{K}{L} \quad \text{bzw.} \quad \frac{K^2}{c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{K^2 + cK}{cL}$$

in obiger Reihenfolge, statt dem zu fordernden konstanten Wert

$$\frac{1}{c} = \frac{p}{1-p}.$$

Besonders dramatisch zeigt sich diese Unzulänglichkeit in zweiter Formel: Der Einfluss der Kosten auf die Bewertung $\left| \frac{\partial Z}{\partial K} \right| = \frac{c}{K^2}$ geht für hohe Kosten rapide gegen Null statt gegen die geforderten konstanten $1 - p$ Prozent.

Daher sind Funktionen mit solchen Argumenten für den gestellten Zweck, feste prozentuale Anteile von Leistung und Kosten an der Bewertungszahl vorzugeben, grundsätzlich ungeeignet. Die Einführung beliebiger weiterer Konstanten in Formeln dieser drei Typen kann daran im Grundsatz nichts ändern.

Literatur

- [1] *Verdingungsordnung für Leistungen (VOL)*, Bundesanzeiger Verlagsgesellschaft, Köln.
- [2] *Unterlagen für die Ausschreibung und Bewertung von IT-Leistungen (UfAB II)*, Schriftenreihe der KBSt, Band 11, Bundesministerium des Innern, Bonn, Berlin, 1988.
- [3] *Vorgehensmodell (V - Modell)*, Schriftenreihe der KBSt, Band 27, Bundesministerium des Innern, Bonn, Berlin.
- [4] *IT-WiBe, Empfehlung zur Durchführung von Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen*, Schriftenreihe der KBSt, Band 52, Bundesministerium des Innern, Bonn, Berlin.

- [5] Arnold, Grell, Müller, Schäfer: *Einheitliche Bewertung von Funktionen und Preisen bei Angeboten im Rahmen einer Gesamtbetrachtung*, Az. S-0272.1/11, IM Baden-Württemberg, 25.10.2001.
- [6] Courant und Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik II*, Springer-Verlag, Berlin 1968.